Devoir maison 1

Exercice 1

1. Supposons $y = gx$ avec $g \in G$. Alors $\mathrm{Stab}(y) = g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$ et donc $\mathrm{Stab}(x)$ et $\mathrm{Stab}(y)$ ont même cardinal.
2. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G} N_X(g) &= \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G}\operatorname{Card}\{x \in X : g\cdot x = x\} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card} G}\operatorname{Card}\{(g,x) \in G\times X : g\cdot x = x\}\end{aligned}$$

Posons $E = \{(g,x) \in G \times X : g\cdot x = x\}$. On peut dénombrer E de deux manières : ou bien en comptant les couples $(g,x) \in E$ avec g fixé, ou bien en comptant les couples $(g,x) \in E$ avec x fixé. Avec la deuxième méthode, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G} N_X(g) &= \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{x\in X}\operatorname{Card}\{g \in G : g\cdot x = x\} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{x\in X}\operatorname{Card}\mathrm{Stab}(x)\end{aligned}$$

Si $x, y \in X$ sont dans la même orbite, alors $\operatorname{Card}\mathrm{Stab}(x) = \operatorname{Card}\mathrm{Stab}(y)$, et donc la somme peut se réécrire

$$\frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G} N_X(g) = \frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{\omega\in\Omega}(\operatorname{Card}\omega)(\operatorname{Card}\mathrm{Stab}(x_\omega))$$

où $x_\omega \in \omega$ désigne un représentant quelconque de ω. Puisque ω est en bijection avec $G/\mathrm{Stab}(x_\omega)$, on a $(\operatorname{Card}\omega)(\operatorname{Card}\mathrm{Stab}(x_\omega)) = \operatorname{Card}(G)$, d'où le résultat.
3. L'hypothèse revient à dire que $\operatorname{Card}\Omega = 1$, et donc

$$\frac{1}{\operatorname{Card} G}\sum_{g\in G} N_X(g) = 1$$

Par l'absurde, supposons que tout $g \in G$ a au moins un point fixe dans X, c'est-à-dire $N_X(g) \geq 1$. Alors la moyenne des $N_X(g)$ ne peut être égale à 1 que si tous les $N_X(g)$ sont égaux à 1. Or pour $g = 1$, on a $N_X(1) = \operatorname{Card} X \geq 2$, ce qui est absurde.

Exercice 2

1. Remarquons que toute fonction de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a \in k^\times$ et $b \in k$, est une bijection de k. Nous allons montrer que $\mathrm{Aff}(k)$ est un sous-groupe de $S(k)$ (groupe des permutations de k). Il est clair que $\mathrm{id}_k \in \mathrm{Aff}(k)$. Soient $g, g' \in \mathrm{Aff}(k)$, $g(x) = ax + b$ et $g'(x) = a'x + b'$. Alors $g \circ g'(x) = a(a'x + b') + b = aa'x + ab' + b$ et donc $g \circ g' \in \mathrm{Aff}(k)$. Par ailleurs $g^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ et donc $g^{-1} \in \mathrm{Aff}(k)$. Donc $\mathrm{Aff}(k)$ est un sous-groupe de $S(k)$.
2. Puisque $\mathrm{Aff}(k)$ est un sous-groupe de $S(k)$, il agit naturellement sur k. Cette action est transitive car si $\lambda, \mu \in k$, la fonction $t(x) = x + \mu - \lambda$ vérifie $t(\lambda) = \mu$. Montrons que l'action est fidèle. Soit $g \in \mathrm{Aff}(k)$, $g(x) = ax + b$, telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in k$. Alors $g(0) = 0 = b$ donc $g(x) = ax$, puis $g(1) = 1 = a$ et donc $g = \mathrm{id}_k$.
3. L'application qui à $(a, b) \in k^\times \times k$ associe la fonction $f_{a,b}(x) = ax+b$ est injective, puisque l'on peut retrouver a et b par les formules $b = f_{a,b}(0)$ et $a = f_{a,b}(1) - f_{a,b}(0)$. Il fait donc sens de définir l'application
$$\begin{aligned} \beta : \mathrm{Aff}(k) &\to k^\times \\ (x \mapsto ax + b) &\mapsto a. \end{aligned}$$
Le calcul de la question 1 montre que $\beta(gg') = \beta(g)\beta(g')$, *i. e.* β est un morphisme de groupes. Il est clair que β est surjectif. Par ailleurs, posons
$$\begin{aligned} \alpha : k &\to \mathrm{Aff}(k) \\ b &\mapsto (x \mapsto x + b). \end{aligned}$$
On vérifie que α est un morphisme de groupes injectif. Par ailleurs, on a $\mathrm{im}(\alpha) = \ker(\beta)$, d'où la suite exacte courte voulue.
4. On peut définir une section s de β en posant $s(a) = f_{a,0}$. L'application s est un morphisme de groupes et vérifie $\beta \circ s = \mathrm{id}_{k^\times}$. Ainsi la suite exacte est scindée.
5. Par le même raisonnement que la section 3, l'application ϕ est bien définie. Le fait que ϕ est un morphisme de groupes résulte du calcul
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. Puisque $\ker \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in k \right\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aff}(k)$, c'est une réunion de classes de conjugaison. Pour $b \in k^\times$, on a
$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc $\{1\}$ et $(\ker \beta)\backslash\{1\}$ sont des classes de conjugaison de $\mathrm{Aff}(k)$.
Remarquons ensuite que si $g, g' \in \mathrm{Aff}(k)$ sont conjugués, $g' = hgh^{-1}$, alors $\beta(g') = \beta(h)\beta(g)\beta(h)^{-1} = \beta(g)$ puisque $k^\times$ est commutatif. Donc si C est une classe de conjugaison non contenue dans $\ker \beta$, alors C est contenue dans l'ensemble $C_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in k \right\}$

pour un certain $a \in k\backslash\{0,1\}$. Réciproquement, montrons que C_a est en fait une classe de conjugaison de $\mathrm{Aff}(k)$. Soient $b, b' \in k$. Pour $\lambda \in k$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b+(1-a)\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc en prenant $\lambda = (b'-b)/(1-a)$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ conjugue $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où le résultat.

7. L'application en question est la composée $\chi \circ \beta$ de deux morphismes de groupes, donc est un morphisme de groupes et définit un caractère linéaire de $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.
8. D'après la question 6, le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ possède $1+1+(p-2) = p$ classes de conjugaison, et donc p représentations irréductibles à isomorphisme près. Puisque le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ est cyclique d'ordre $p-1$, la question précédente fournit $p-1$ caractères linéaires deux à deux distincts de $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. La dimension d de la représentation irréductible manquante est donnée par $(p-1)\cdot 1^2 + d^2 = \mathrm{Card}\,\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = p(p-1)$, d'où $d^2 = (p-1)^2$ et donc $d = p-1$.
9. L'application $f \mapsto f \circ g^{-1}$ est un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de V. Il suffit donc de montrer $g\cdot(g'\cdot f) = (gg')\cdot f$. Pour $x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on a

$$(g\cdot(g'\cdot f))(x) = (g'\cdot f)(g^{-1}x) = f(g'^{-1}g^{-1}x) = f((gg')^{-1}x) = ((gg')\cdot f)(x).$$

10. Le sous-espace D de V formé des fonctions constantes est clairement stable par G ; c'est une sous-représentation V de dimension 1. Posons

$$W = \left\{ f \in V : \sum_{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} f(x) = 0 \right\}.$$

Soit $f \in W$. Pour $g \in \mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, on a

$$\sum_{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} (g\cdot f)(x) = \sum_{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} f(g^{-1}x) = \sum_{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} f(x) = 0,$$

et donc $g\cdot f \in W$. Ainsi W est une sous-représentation de V de dimension $p-1$, et puisque $D \cap W = \{0\}$, on a $V = D \oplus W$.

11. Puisque D est la représentation triviale, on a $\chi_V = \chi_W + 1$ et il suffit de calculer χ_V. La représentation V n'est autre que la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Pour $g \in \mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, on a donc

$$\chi_V(g) = \mathrm{Card}\{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} : g(x) = x\}.$$

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. Si $a \neq 1$, alors l'équation $ax+b = x$ admet exactement une solution dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et donc $\chi_V(g) = 1$. Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors g n'a pas de point fixe dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et donc $\chi_V(g) = 0$. Enfin, on a $\chi_V(1) = p$. On en déduit

$$\chi_W \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \chi_V \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 1, \\ -1 & \text{si } a = 1, b \neq 0, \\ p-1 & \text{si } a = 1, b = 0. \end{cases}$$

12. Calculons le produit scalaire $\langle \chi_W, \chi_W \rangle$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \chi_W, \chi_W \rangle &= \frac{1}{p(p-1)} \sum_{g \in \mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})} |\chi_W(g)|^2 \\
&= \frac{1}{p(p-1)} \sum_{a \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times} \sum_{b \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \left| \chi_W \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \frac{1}{p(p-1)} \sum_{b \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} \chi_W^2 \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p(p-1)} \left((p-1) \cdot (-1)^2 + (p-1)^2 \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi W est irréductible.
Si $p \geq 3$, alors W est de dimension $p-1 \geq 2$, et on a obtenu la liste complète des représentations irréductibles de $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ à isomorphisme près : ce sont les $\chi \circ \beta$ où χ parcourt les caractères de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$, et la représentation W.
Si $p = 2$, alors $\mathrm{Aff}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est un groupe d'ordre 2 isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, donc il admet deux représentations irréductibles de dimension 1. La représentation W, qui est de dimension 1, correspond à l'unique caractère non trivial de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.